1. Analyse des algorithmes

Temps d'exécution

- *Opérations élémentaires*: dépend du contexte, souvent comparaisons, affectations, arithmétique, accès, etc.
- *Pire cas* $t_{\max}(n)$: nombre maximum d'opérations élémentaires exécutées parmi les entrées de taille n
- *Meilleur cas* $t_{\min}(n)$: même chose avec « minimum »
- $t_{\max}(m, n)$, $t_{\min}(m, n)$: même chose par rapport à m et n

Notation asymptotique

- *Déf.*: $f \in \mathcal{O}(g)$ si $n \geq n_0 \to f(n) \leq c \cdot g(n)$ pour certains c, n_0
- *Signifie*: f croît moins ou aussi rapid. que g pour $n \to \infty$
- *Transitivité*: $f \in \mathcal{O}(g)$ et $g \in \mathcal{O}(h) \to f \in \mathcal{O}(h)$
- *Règle des coeff.*: $f_1 + \ldots + f_k \in \mathcal{O}(c_1 \cdot f_1 + \ldots + c_k \cdot f_k)$
- *Règle du max.*: $f_1 + \ldots + f_k \in \mathcal{O}(\max(f_1, \ldots, f_k))$
- *Déf.*: $f \in \Omega(g) \leftrightarrow g \in \mathcal{O}(f)$; $f \in \Theta(g) \leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$
- *Règle des poly.*: f polynôme de degré $d \to f \in \Theta(n^d)$

Notation asymptotique (suite)

- *Simplification*: lignes élem. comptées comme une seule opér.
- *Règle de la limite*:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & f \in \mathcal{O}(g) \text{ et } g \notin \mathcal{O}(f) \\ +\infty & f \notin \mathcal{O}(g) \text{ et } g \in \mathcal{O}(f) \\ \text{const.} & \Theta(f) = \Theta(g) \end{cases}$$

- *Multi-params.*: $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ étendues avec plusieurs seuils

Correction et terminaison

- *Correct*: sur *toute* entrée x qui satisfait la pré-condition, x et sa sortie y satisfont la post-condition
- *Termine*: atteint instruction **retourner** sur *toute* entrée
- *Invariant*: propriété qui demeure vraie à chaque fois qu'une ou certaines lignes de code sont atteintes

Exemples de complexité

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset \mathcal{O}(n^2 \log n)$$
$$\subset \mathcal{O}(n^3) \subset \mathcal{O}(n^d) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(3^n) \subset \mathcal{O}(b^n) \subset \mathcal{O}(n!)$$

2. Tri

Approche générique

- *Inversion*: indices (i, j) t.q. $i < j$ et $s[i] > s[j]$
- *Progrès*: corriger une inversion en diminue la quantité
- *Procédure*: sélectionner et corriger une inversion, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus

Algorithmes (par comparaison)

- *Insertion*: considérer $s[1:i-1]$ triée et insérer $s[i]$ dans $s[1:i]$
- *Monceau*: transformer s en monceau et retirer ses éléments
- *Fusion*: découper s en deux, trier chaque côté et fusionner
- *Rapide*: réordonner autour d'un pivot et trier chaque côté

Propriétés

- *Sur place*: n'utilise pas de séquence auxiliaire
- *Stable*: l'ordre relatif des éléments égaux est préservé

Sommaire

Algorithme	**Complexité** (par cas)			**Sur place**	**Stable**
	meilleur	moyen	pire		
insertion	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
monceau	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
fusion	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✗	✓
rapide	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗

Usage

- *Petite taille*: tri par insertion
- *Grande taille*: tri par monceau ou tri rapide
- *Grande taille + stabilité*: tri par fusion

Tri sans compraison

- *Par comparaison*: barrière théorique de $\Omega(n \log n)$
- *Sans comparaison*: possible de faire mieux pour certains cas
- *Représentation binaire*: trier (de façon stable) en ordonnant du bit de poids faible vers le bit de poids fort
- *Complexité*: $\Theta(mn)$ où $m =$ nombre de bits et $n = |s|$

3. Graphes

Graphes

- *Graphe*: $\mathcal{G} = (V, E)$ où V = sommets et E = arêtes
- *Dirigé vs. non dirigé*: $\{u, v\} \in E$ vs. $(u, v) \in E$
- *Degré (cas non dirigé)*: $\deg(u) = \#$ de voisins
- *Degré (cas dirigé)*: $\deg^-(u) = \#$ préd., $\deg^+(u) = \#$ succ.
- *Taille*: $|E| \in \Theta(\text{somme des degrés})$ et $|E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- *Chemin*: séq. $u_0 \to \cdots \to u_k$ (taille $= k$, simple si sans rép.)
- *Cycle*: chemin de u vers u (simple si sans rép. sauf début/fin)
- *Sous-graphe*: obtenu en retirant sommets et/ou arêtes
- *Composante*: sous-graphe max. où sommets access. entre eux

Parcours

- *Profondeur*: explorer le plus loin possible, puis retour (pile)
- *Largeur*: explorer successeurs, puis leurs succ., etc. (file)
- *Temps d'exécution*: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Représentation

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} [a \mapsto [b, c], \\ \;b \mapsto [a], \\ \;c \mapsto [b]] \end{array}$$

	Mat.	**Liste** (non dirigé)	**Liste** (dir.)
$u \to v$?	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\min(\deg(u), \deg(v)))$	$\mathcal{O}(\deg^+(u))$
$\{v : u \to v\}$	$\Theta(\|V\|)$	$\mathcal{O}(\deg(u))$	$\mathcal{O}(\deg^+(u))$
$\{u : u \to v\}$	$\Theta(\|V\|)$	$\mathcal{O}(\deg(v))$	$\mathcal{O}(\|V\| + \|E\|)$
Modif. $u \to v$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\deg(u) + \deg(v))$	$\mathcal{O}(\deg^+(u))$
Mémoire	$\Theta(\|V\|^2)$	$\Theta(\|V\| + \|E\|)$	

Propriétés et algorithmes

- *Plus court chemin*: parcours en largeur + stocker préd.
- *Ordre topologique*: $u_1 \preceq \cdots \preceq u_n$ où $i < j \implies (u_j, u_i) \notin E$
- *Tri topologique*: mettre sommets de degré 0 en file, retirer en mettant les degrés à jour, répéter tant que possible
- *Détec. de cycle*: tri topo. + vérifier si contient tous sommets
- *Temps d'exécution*: tous linéaires

Arbres

- *Arbre*: graphe connexe et acyclique (ou prop. équivalentes)
- *Forêt*: graphe constitué de plusieurs arbres
- *Arbre couv.*: arbre qui contient tous les sommets d'un graphe

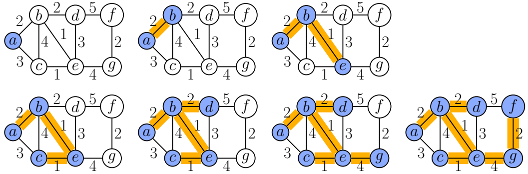
4. Algorithmes gloutons

Arbres couvrants minimaux

- *Graphe pondéré*: $\mathcal{G} = (V, E)$ où $p[e]$ est le poids de l'arête e
- *Poids d'un graphe*: $p(\mathcal{G}) = \sum_{e \in E} p[e]$
- *Arbre couv. min.*: arbre couvrant de $\mathcal{G}$ de poids minimal

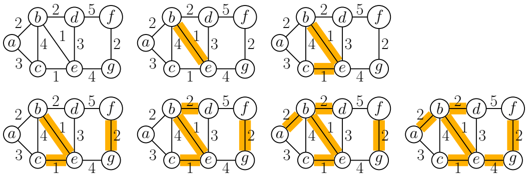
Algorithme de Prim–Jarník

- *Approche*: faire grandir un arbre en prenant l'arête min.
- *Complexité*: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$ avec monceau



Algorithme de Kruskal

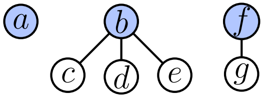
- *Approche*: connecter forêt avec l'arête min. jusqu'à un arbre
- *Complexité*: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$ avec ensembles disjoints



Ensembles disjoints

- *But*: manipuler une partition d'un ensemble V
- *Représentation*: chaque ensemble sous une arborescence

$\{a\}\ \{b, c, d, e\}\ \{f, g\}$



`init`(V)	$\Theta(\|V\|)$
`trouver`(v)	$\mathcal{O}(\log \|V\|)$
`union`(u, v)	$\mathcal{O}(\log \|V\|)$

Algorithme glouton

1) *Choisir* un candidat c itérativement (*sans reconsidérer*)
2) Ajouter c à solution partielle S si *admissible*
3) Retourner S si *solution (complète)*, « impossible » sinon

5. Algorithmes récursifs et approche diviser-pour-régner

Diviser-pour-régner

- *A)* découper en sous-problèmes disjoints
- *B)* obtenir solutions récursivement
- *C)* s'arrêter aux cas de base (souvent triviaux)
- *D)* combiner solutions pour obtenir solution globale
- *Exemple*: tri par fusion $\mathcal{O}(n \log n)$

Récurrences linéaires

- *Cas homogène:* $\sum_{i=0}^{d} a_i \cdot t(n-i) = 0$
- *Polynôme caractéristique:* $\sum_{i=0}^{d} a_i \cdot x^{d-i}$
- *Forme close:* $t(n) = \sum_{i=1}^{d} c_i \cdot \lambda_i^n$ où les λ_i sont les racines
- *Constantes c_i:* obtenues en résolvant un sys. d'éq. lin.
- *Cas non homo.:* si $= c \cdot b^n$, on multiplie poly. par $(x - b)$
- *Exemple*:
  - Récurrence: $t(n) = 3 \cdot t(n-1) + 4 \cdot t(n-2)$
  - Poly. carac.: $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$
  - Forme close: $t(n) = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n$

Autres méthodes

- *Substitution*: remplacer $t(n), t(n-1), t(n-2), \ldots$ par sa déf. jusqu'à deviner la forme close
- *Arbres*: construire un arbre représentant la récursion et identifier le coût de chaque niveau

Quelques algorithmes

- *Hanoï*: $\mathit{src}[1:n-1] \to \mathit{tmp}, \mathit{src}[n] \to \mathit{dst}, \mathit{tmp}[1:n-1] \to \mathit{dst}$ $\mathcal{O}(2^n)$
- *Exp. rapide*: exploiter $b^n = (b^{n \div 2})^2 \cdot b^{n \bmod 2}$ $\mathcal{O}(\log n)$
- *Mult. rapide*: calculer $(a+b)(c+d)$ en 3 mult. $\mathcal{O}(n^{\log 3})$
- *Horizon*: découper blocs comme tri par fusion $\mathcal{O}(n \log n)$

Théorème maître (allégé)

- $t(n) = c \cdot t(n \div b) + f(n)$ où $f \in \mathcal{O}(n^d)$:
  - $\mathcal{O}(n^d)$ si $c < b^d$
  - $\mathcal{O}(n^d \cdot \log n)$ si $c = b^d$
  - $\mathcal{O}(n^{\log_b c})$ si $c > b^d$

6. Force brute

Approche

- *Exhaustif*: essayer toutes les sol. ou candidats récursivement
- *Explosion combinatoire*: souvent # solutions $\geq b^n, n!, n^n$
- *Avantage*: simple, algo. de test, parfois seule option
- *Désavantage*: généralement très lent et/ou avare en mémoire

Techniques pour surmonter explosion

- *Élagage*: ne pas développer branches inutiles
- *Contraintes*: élaguer si contraintes enfreintes
- *Bornes*: élaguer si impossible de faire mieux
- *Approximations*: débuter avec approx. comme meilleure sol.
- *Si tout échoue*: solveurs SAT ou d'optimisation

Problème des n dames

- *But*: placer n dames sur échiquier sans attaques
- *Algo.*: placer une dame par ligne en essayant colonnes dispo.

Sac à dos

- *But*: maximiser valeur sans excéder capacité
- *Algo.*: essayer sans et avec chaque objet
- *Mieux*: élaguer dès qu'il y a excès de capacité
- *Mieux++*: élaguer si aucune amélioration avec somme valeurs

Retour de monnaie

- *But*: rendre montant avec le moins de pièces
- *Algo.*: pour chaque pièce, essayer d'en prendre 0 à # max.

Approche

- *Principe d'optimalité*: solution optimale obtenue en combinant solutions de sous-problèmes qui se chevauchent
- *Descendante*: algo. récursif + mémoïsation (ex. Fibonacci)
- *Ascendante*: remplir tableau itér. avec solutions sous-prob.

Retour de monnaie

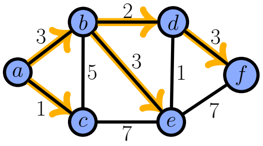
- *Sous-question*: # pièces pour rendre j avec pièces 1 à i?
- *Identité*: $T[i, j] = \min(T[i-1, j],\ T[i, j - s[i]] + 1)$
- *Exemple*: montant $m = 10$ et pièces $s = [1, 5, 7]$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5	2
3	0	1	2	3	4	1	2	1	2	3	2

Sac à dos

- *Sous-question*: val. max. avec capacité j et les objets 1 à i?
- *Identité*: $T[i, j] = \max(T[i-1, j],\ T[i-1, j - p[i]] + v[i])$

Plus courts chemins



- *Déf.*: chemin simple de poids minimal
- *Bien défini*: si aucun cycle négatif
- *Approche générale*: raffiner distances partielles itérativement
- *Dijkstra*: raffiner en marquant sommet avec dist. min.
- *Floyd-Warshall*: raffiner via sommet intermédiaire v_k
- *Bellman-Ford*: raffiner avec $\geq 1, 2, \ldots, |V| - 1$ arêtes
- *Sommaire*:

	Dijkstra	**Bellman-Ford**	**Floyd-Warshall**
Types de chemins	d'un sommet vers les autres		paires de sommets
Poids négatifs?	✗	✓	✓
Temps d'exécution	$\mathcal{O}(\|V\| \log \|V\| + \|E\|)$	$\Theta(\|V\| \cdot \|E\|)$	$\Theta(\|V\|^3)$
Temps ($\|E\| \in \Theta(1)$)	$\mathcal{O}(\|V\| \log \|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$	$\Theta(\|V\|^3)$
Temps ($\|E\| \in \Theta(\|V\|)$)	$\mathcal{O}(\|V\| \log \|V\|)$	$\Theta(\|V\|^2)$	$\Theta(\|V\|^3)$
Temps ($\|E\| \in \Theta(\|V\|^2)$)	$\mathcal{O}(\|V\|^2)$	$\Theta(\|V\|^3)$	$\Theta(\|V\|^3)$

8. Algorithmes et analyse probabilistes

Modèle probabiliste

- *Modèle*: on peut tirer à pile ou face (non déterministe)
- *Aléa*: on peut obtenir une loi uniforme avec une pièce
- *Idéalisé*: on suppose avoir accès à une source d'aléa parfaite (en pratique: source plutôt pseudo-aléatoire)

Algorithmes de Las Vegas

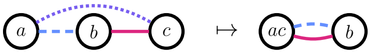
- *Temps*: varie selon les choix probabilistes
- *Valeur de retour*: toujours correcte
- *Exemple*: tri rapide avec pivot aléatoire
- *Temps espéré*: dépend de $\mathbb{E}[Y_x]$ où $Y_x = \#$ opér. sur entrée x

Algorithmes de Monte Carlo

- *Temps*: borne ne varie *pas* selon les choix probabilistes
- *Valeur de retour*: pas toujours correcte
- *Exemple*: algorithme de Karger
- *Prob. d'erreur*: dépend de $\Pr(Y_x \neq \text{bonne sortie sur } x)$

Coupe minimum: algorithme de Karger

- *Coupe*: partition (X, Y) des sommets d'un graphe non dirigé
- *Taille*: # d'arêtes qui traversent X et Y
- *Coupe min.*: identifier la taille minimale d'une coupe
- *Algorithme*: contracter itérativement une arête aléatoire en gardant les multi-arêtes, mais pas les boucles



- *Prob. d'erreur*: $\leq 1 - 1/|V|^2$ (Monte Carlo)
- *Amplification*: on peut réduire (augmenter) la prob. d'erreur (de succès) arbitrairement (en général: avec min., maj., $\vee$, etc.)

Temps moyen

- *Temps moyen*: $\sum$(temps instances de taille n) / # instances
- *Attention*: *pas* la même chose que le temps espéré
- *Hypothèse*: entrées distribuées uniformément ($\pm$ réaliste)
- *Exemple*: $\Theta(n^2)$ pour le tri par insertion