IFT436 – Algorithmes et structures de données

Université de Sherbrooke

Examen périodique

Enseignant: Michael Blondin
Date: samedi 17 octobre 2020
Durée: 110 min.

Directives:

- Vous devez répondre aux questions dans le **cahier de réponses**, *pas* sur ce questionnaire;
- **Une seule feuille** de notes manuscrites au format $8\frac{1}{2}'' \times 11''$ est permise;
- **Aucun matériel additionnel** (notes de cours, fiches récapitulatives, etc.) n'est permis;
- **Aucun appareil électronique** (calculatrice, téléphone, montre intelligente, etc.) n'est permis;
- Vous devez donner **une seule réponse** par sous-question;
- L'examen comporte **4 questions** sur **5 pages** valant un total de **50 points**;
- La correction se base notamment sur la **clarté**, l'**exactitude** et la **concision** de vos réponses, ainsi que sur la **justification** pour les questions qui en requièrent une;
- Si la **base d'un logarithme** n'est pas spécifiée, il s'agit de la base 2: « log » dénote « $\log_2$ »;
- Les indices d'une séquence **débutent à 1**; autrement dit, $s = [s[1], s[2], \ldots, s[n]]$ si $n = |s|$.

Question 1: analyse des algorithmes

(a) Ordonnez ces fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 selon la notation $\mathcal{O}$ (de la plus faible vers la plus haute complexité): 7 pts

$$\underbrace{5 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{n}{2^i} + 3}_{f_1}, \quad \underbrace{\frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i^3 - 5i + 1)}_{f_2}, \quad \underbrace{\log(n^8) \cdot \log(32n)}_{f_3}, \quad \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \log(4^n) + \left(\frac{3}{2}\right)^n}_{f_4}, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 42j}_{f_5}$$

$$\underbrace{\mathcal{O}(f_3)}_{\mathcal{O}(\log(n)^2)} \subseteq \underbrace{\mathcal{O}(f_1)}_{\mathcal{O}(n)} \subseteq \underbrace{\mathcal{O}(f_5)}_{\mathcal{O}(n^3)} \subseteq \underbrace{\mathcal{O}(f_2)}_{\mathcal{O}(n^4)} \subseteq \underbrace{\mathcal{O}(f_4)}_{\mathcal{O}(1.5^n)}$$

(b) Considérons un algorithme $\mathcal{A}$ qui reçoit en entrée un graphe dirigé de n sommets et m arêtes. Après l'avoir analysé, nous avons obtenu $t_{\max} \in \mathcal{O}(3n \log n + 2n \log m + 5n)$, où $t_{\max}$ dénote le temps d'exécution dans le pire cas de $\mathcal{A}$. Pouvons-nous simplifier et affirmer que $t_{\max} \in \mathcal{O}(n \log n)$? Justifiez. 2 pts

Oui. On a $t_{\max} \in \mathcal{O}(n \log n + n \log m)$ par les règles des coefficients et du maximum. De plus, $m \leq n(n-1) \leq n^2$. Ainsi, $n \log m \leq n \log(n^2) = 2n \log n \in \mathcal{O}(n \log n)$.

(c) Si $f \in \Theta(g)$ et $h \in \Omega(g)$, pouvons-nous déduire $f \in \Omega(h)$? Justifiez. 2 pts

Non. Par exemple, $f(n) = n$, $g(n) = n$ et $h(n) = n^2$ satisfont ces contraintes, mais $n \notin \Omega(n^2)$.

(d) Dites auxquels de ces ensembles appartient la fonction $n \log n$: 2 pts

$$\Omega(n), \quad \mathcal{O}(\sqrt{n}), \quad \Theta(2^n), \quad \Omega(2n \log n), \quad \mathcal{O}(n^2), \quad \mathcal{O}(n!), \quad \Theta(\sqrt{n} \cdot n).$$

$$\Omega(n), \Omega(2n \log n), \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n!)$$

Question 2: tri

Considérons l'algorithme de tri suivant:

Entrée: séquence s de $n \in \mathbb{N}$ éléments comparables
Sortie: s triée

```
1  j ← n − 1
2  faire
3  |  fini ← vrai
4  |  pour i ∈ [1..j]
5  |  |  si s[i] > s[i + 1] alors
6  |  |  |  s[i] ↔ s[i + 1]              // inverser le contenu de s[i] et s[i + 1]
7  |  |  |  fini ← faux
8  |  j ← j − 1
9  tant que ¬fini
10 retourner s
```

(a) Exécutez l'algorithme sur l'entrée $s = [10, 50, 20, 40, 30]$. Plus précisément, donnez le contenu de la séquence s et du compteur j à la fin de chaque tour de la boucle **faire...tant que**. 3 pts

j	s
3	$[10, 20, 40, 30, 50]$
2	$[10, 20, 30, 40, 50]$
1	$[10, 20, 30, 40, 50]$

(b) Les affirmations suivantes sont toutes vraies. Choisissez en *deux* (pas plus!) et montrez leur véracité. 7 pts

(i) L'algorithme fonctionne en temps $\Omega(n^2)$ dans le pire cas.

Sur la famille d'entrées $[2, \ldots, n, 1]$, l'élément 1 se déplace d'une position vers la gauche à chaque tour de la boucle principale. Ainsi, $t_{\max} \in \Omega(\sum_{j=0}^{n-1} j) = \Omega(n(n-1)/2) = \Omega(n^2)$.

(ii) L'algorithme fonctionne en temps $\mathcal{O}(n^2)$ dans le pire cas.

La boucle principale décrémente j et termine à coup sûr lorsque $j = 0$. La boucle **pour** ne peut pas être exécutée plus de n fois car on a toujours $j < n$. Ainsi, $t_{\max}(n) \in \mathcal{O}(n \cdot n) = \mathcal{O}(n^2)$.

(iii) L'algorithme fonctionne en temps $\Omega(n)$ dans le meilleur cas.

L'algorithme doit exécuter les $n - 1$ itérations de la boucle **pour** à la première itération de la boucle principale, peu importe l'entrée. Ainsi, $t_{\min}(n) \in \Omega(n - 1) = \Omega(n)$.

(iv) L'algorithme fonctionne en temps $\mathcal{O}(n)$ dans le meilleur cas.

La condition du **si** est toujours fausse sur la famille d'entrées $[1, 2, \ldots, n]$, ce qui maintient *fini* à *faux*. L'algorithme termine donc après les $n - 1$ itérations de la boucle **pour**. Ainsi, $t_{\min}(n) \in \mathcal{O}(n)$.

(v) L'algorithme est correct.

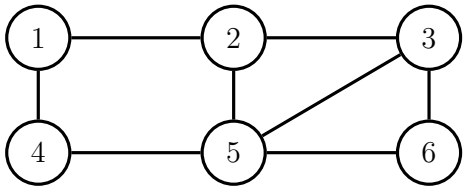
La boucle principale satisfait l'invariant « $s[j + 1 : n]$ est triée » car la boucle **pour** déplace $\max s[1 : j+1]$ à la position $j+1$. De plus, à la dernière itération de la boucle principale, on a $s[1] \leq \cdots \leq s[j+1]$ car $j = 0$ ou *fini* $=$ *vrai*. Donc, $s[1 : j + 1]$ et $s[j + 1 : n]$ sont triées, et ainsi s aussi.

(c) Dites si l'algorithme est stable et/ou s'il est sur place. Justifiez. 4 pts

Sur place: Oui, car aucune séquence auxiliaire n'est utilisée.
Stable: Oui, l'ordre relatif des éléments est préservé car on corrige des inversions *consécutives*.

Question 3: graphes

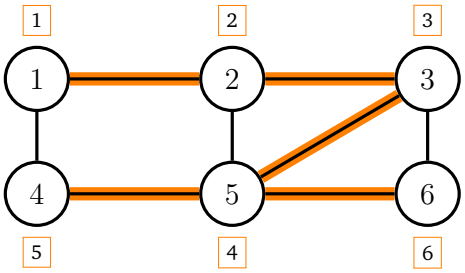
(a) Considérons ce graphe non dirigé $\mathcal{G}$:



(i) Donnez la *liste d'adjacence* de $\mathcal{G}$ et le degré de chacun de ses sommets. 2 pts

Liste d'adjacence: $[[2,4],[1,3,5],[2,5,6],[1,5],[2,3,4,6],[3,5]]$
Degrés: $[2,3,3,2,4,2]$

(ii) Parcourez $\mathcal{G}$ en profondeur à partir du sommet 1, en laissant une trace de l'*ordre dans lequel les sommets sont marqués* et de l'*arbre couvrant* formé des arêtes qui contribuent à la découverte d'un sommet. Lors de l'exploration d'un sommet, considérez ses voisins en ordre croissant de leur identifiant numérique. 2 pts



(iii) Quels sont les *cycles simples* de $\mathcal{G}$? 2 pts

$2-3-5-2$
$3-5-6-3$
$1-2-5-4-1$
$2-3-6-5-2$
$1-2-3-5-4-1$
$1-2-3-6-5-4-1$

(b) Soit $\mathcal{G}$ une forêt. Supposons que l'on ajoute une direction à chaque arête de $\mathcal{G}$ de façon arbitraire. Expliquez pourquoi le graphe *dirigé* résultant possède forcément un ordre topologique. 2 pts

Soit $\mathcal{G}'$ obtenu après l'ajout des directions à $\mathcal{G}$. S'il y avait un cycle simple C dans $\mathcal{G}'$, alors C en serait aussi un dans $\mathcal{G}$, ce qui est impossible car une forêt est acyclique par définition. Ainsi, $\mathcal{G}'$ est acyclique et possède donc un ordre topologique (proposition vue en classe).

(c) Donnez un algorithme, sous forme de pseudocode, qui résout le problème suivant: 5 pts

ENTRÉE: un graphe dirigé $\mathcal{G} = (V, E)$ sous forme de liste d'adjacence
SORTIE: $\mathcal{G}$ est-il fortement connexe?

Analysez son temps d'exécution dans le pire cas. Pour obtenir tous les points, il doit appartenir à $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

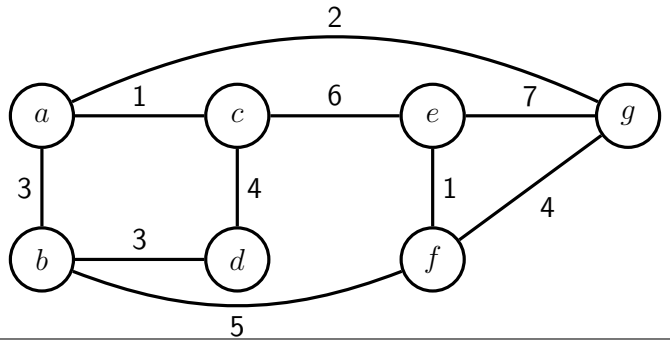
Précision: au besoin, vous pouvez invoquer des algorithmes couverts en classe sans les réimplémenter.

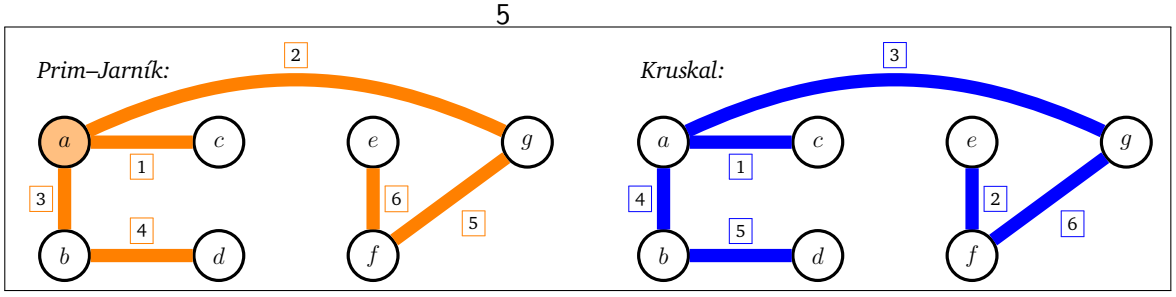
Entrée: un graphe dirigé $\mathcal{G} = (V, E)$ représenté par une liste d'adjacence adj
Sortie: $\mathcal{G}$ est fortement connexe?

```
// Obtenir une représentation du graphe renversé
adj' ← [u ↦ [] : u ∈ V]                                   // O(|V|)
pour u ∈ V                                                // O(Σ_{u∈V}(1 + deg⁺(u))) = O(|V| + |E|)
    pour v ∈ adj[u]
        ajouter u à adj'[v]
// 1er sommet peut atteindre tous les sommets et atteignable de tous?
X  ← parcours-en-profondeur(adj, 1)                       // O(|V| + |E|)
X' ← parcours-en-profondeur(adj', 1)                      // O(|V| + |E|)
retourner |X| = |X'| = |V|                                // O(1)
```

Question 4: algorithmes gloutons

(a) Identifiez un arbre couvrant minimal de ce graphe pondéré avec l'algorithme de Prim–Jarník ou de Kruskal. Laissez une trace de l'ordre dans lequel les arêtes de l'arbre sont sélectionnées. 3 pts





(b) Soit $\mathcal{G}$ un graphe non dirigé pondéré par p. Supposons que $\mathcal{G}$ soit connexe et que ses poids soient *distincts*, c.-à-d. $p[e] \neq p[f]$ pour toutes arêtes $e \neq f$. Montrez que $\mathcal{G}$ possède *exactement un* arbre couvrant minimal. 2 pts

Supposons que $\mathcal{G}$ possède deux arbres couvrants minimaux $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$. Comme vu en classe, l'algorithme de Prim–Jarník peut identifier tous les arbres couvrants minimaux de $\mathcal{G}$, donc en particulier $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. Considérons le premier moment où l'algorithme ne choisit pas la même arête pour $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. À ce moment, les deux arbres sont identiques et la plus petite arête disponible est sélectionnée. Comme tous les poids sont distincts, il y a un seul choix possible. Il y a donc une contradiction.

(c) Considérons le problème qui consiste à maximiser le nombre de cours qui peuvent avoir lieu, sans conflit, dans *une seule* salle. Comme au devoir 1, un cours est une paire $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, où i indique son début et j sa fin, et où deux cours (i, j) et (k, ℓ) ne sont pas en conflit ssi $j \leq k$. 5 pts

Une approche naïve pour résoudre ce problème consiste à énumérer toutes les façons de choisir un ensemble de cours parmi n cours; vérifier s'ils créent un conflit; et si ce n'est pas le cas, mettre à jour la meilleure solution découverte. Afin de réduire la complexité, on pourrait plutôt utiliser cette approche gloutonne:

Entrée: une séquence de cours $H = [(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)]$
Sortie: le nombre maximal de cours de H qu'on peut assigner dans une même salle

```
1 S ← ∅
2 tant que H est non vide
3 |   sélectionner et retirer un cours c de H
4 |   si c ne crée pas de conflit dans S alors ajouter c à S
5 retourner |S|
```

Considérons ces trois implémentations de l'opération « **sélectionner** »:

(i) choisir un cours $c = (i, j)$ de plus petite durée $j - i$;

(ii) choisir un cours $c = (i, j)$ qui termine le plus tôt;

(iii) choisir un cours $c = (i, j)$ qui débute le plus tôt.

L'approche gloutonne ci-dessus est correcte avec *une seule* de ces trois implémentations. Identifiez-la. Dites aussi combien d'itérations l'approche naïve doit effectuer dans le pire cas. Justifiez.

(i) n'est pas optimale car elle retourne 1 plutôt que 2 sur entrée $[(0, 3), (2, 4), (3, 6)]$.
(iii) n'est pas optimale car elle retourne 1 plutôt que 2 sur entrée $[(0, 4), (1, 2), (2, 3)]$.
(ii) est donc optimale.

Il y a $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ sous-ensembles d'un ensemble de n éléments. Comme la solution optimale pourrait être la dernière considérée, l'approche naïve doit faire 2^n itérations.