IFT436 – Algorithmes et structures de données

Université de Sherbrooke

Examen final

Enseignant: Michael Blondin
Date: jeudi 15 décembre 2022
Durée: 3 heures

Directives:

- Vous devez répondre aux questions dans le **cahier de réponses**, et non sur ce questionnaire;
- **Une seule feuille** de notes au format 8½" × 11" est permise;
- Les **fiches récapitulatives** des chapitres 5 à 8 se trouvent à la dernière page du questionnaire;
- **Aucun matériel additionnel** n'est permis;
- **Aucun appareil électronique** (calculatrice, téléphone, montre intelligente, etc.) n'est permis;
- Vous devez donner **une seule réponse** par sous-question;
- L'examen comporte **5 questions** sur **4 pages** valant un total de **50 points**;
- La correction se base notamment sur la **clarté**, l'**exactitude** et la **concision** de vos réponses, ainsi que sur la **justification** pour les questions qui en requièrent une;
- Les indices d'une séquence **débutent à 1**; autrement dit, $s = [s[1], s[2], \ldots, s[n]]$ si $n = |s|$.

Question 1: analyse d'algorithmes récursifs

Considérons un ordinateur, constitué de 4 processeurs, sur lequel nous cherchons à exécuter n tâches. La tâche i se complète en $t[i]$ millisecondes. Par exemple, si $t = [5, 1, 3, 2, 8, 4]$ et que l'assignation des temps de tâches aux processeurs est $p = [8, 5, 3 + 4, 1 + 2]$, alors toutes les tâches sont complétées en $\max(8, 5, 3 + 4, 1 + 2) = 8$ millisecondes. Cet algorithme identifie le temps minimal d'exécution des tâches parmi toutes les assignations:

Entrées: une séquence t de $n \geq 0$ entiers positifs
Résultat: temps minimal pour compléter toutes les tâches sur un ordinateur à 4 processeurs

```
temps-min(t):
    aux(i, p):
        si i = n + 1 alors
            retourner max(max(p[1], p[2]), max(p[3], p[4]))    // temps du processeur le + chargé
        sinon
            m ← ∞
            pour j ∈ [1..4]
                p[j] ← p[j] + t[i]                             // assigner tâche i au processeur j
                m    ← min(m, aux(i + 1, p))                   // compléter assignation récursivement
                p[j] ← p[j] − t[i]                             // rétablir processeur j
            retourner m
    retourner aux(1, [0, 0, 0, 0])
```

(a) Donnez une récurrence linéaire t où $t(n)$ dénote le nombre d'opérations élémentaires exécutées par l'appel initial « `aux(`$1, [0,0,0,0]$`)` » par rapport à n. Considérez ces opérations élémentaires: 2,5 pts

- Arithmétique: $+$, $-$, max, min, etc.
- Affectations de la forme « $var \leftarrow \ldots$ » ou « $seq[k] \leftarrow \ldots$ »
- Comparaisons: $=$, $\geq$, etc.
- Accès aux éléments d'une séquence (en lecture).

(b) Identifiez la forme close de t. Vous n'avez *pas* à identifier les valeurs des constantes, mais vous devez indiquer le système d'équations que vous auriez à résoudre pour les identifier. Laissez une trace de votre démarche. 3 pts

(c) Expliquez comment améliorer l'algorithme à l'aide d'une forme d'élagage. 2,5 pts

Question 2: diviser-pour-régner

Considérons des séquences d'éléments de $\mathbb{N} \times \{a, b\}$, par ex. $s = [(4, a), (3, b), (1, b), (2, a)]$. Nous cherchons à trier de telles séquences sous l'ordre défini par $(x, y) \preceq (x', y')$ ssi $(y = a \wedge y' = b) \vee (y = y' \wedge x \leq x')$. En mots: nous priorisons les paires qui contiennent « a » avant celles avec « b ». Par exemple, sur entrée s, la sortie attendue est $[(2, a), (4, a), (1, b), (3, b)]$.

(a) Complétez ce pseudocode: 7 pts

Entrée: une séquence s d'éléments de $\mathbb{N} \times \{a, b\}$
Résultat: s triée sous $\preceq$

```
trier(s):
    si |s| ≤ 1 alors
        retourner s
    sinon
        m ← |s| ÷ 2
        g ← trier(s[1:m])
        /* Complétez ce segment                                  */
        /*     (nécessite plusieurs lignes de pseudocode)        */
```

(b) Complétez ce pseudocode: 2 pts

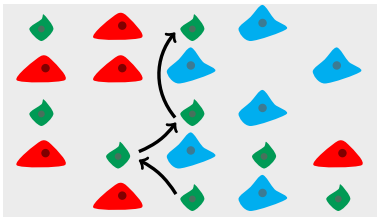
Entrées: une séquence s d'éléments de $\mathbb{N} \times \{a, b\}$ déjà triée sous $\preceq$, et $(x, y) \in \mathbb{N} \times \{a, b\}$
Résultat: *vrai* si s contient (x, y), *faux* sinon

```
contient(s, (x, y)):
    contient'(lo, hi):
        si lo = hi alors
            retourner (s[lo] = (x, y))
        sinon
            i ← (lo + hi) ÷ 2
            (x', y') ← s[i]
            si ...ligne 1... alors                    /* à compléter */
                retourner contient'(lo, i)
            sinon
                ...ligne 2...                         /* à compléter */
    retourner contient'(1, |s|)
```

(c) Quel est le temps d'exécution asymptotique des algorithmes obtenus en (a) et (b) dans le pire cas? Vous pouvez supposer que $|s|$ est une puissance de deux. Justifiez. 3 pts

Question 3: force brute et programmation dynamique

Lassé de descendre des montagnes, Tux 🐧 s'intéresse maintenant à la grimpe. Un mur d'escalade est formé de prises colorées posées sur une grille $n \times n$. Tux débute sur une prise de son choix au bas du mur et doit se rendre à une prise au sommet du mur en utilisant *toujours des prises d'une même couleur*. En raison de sa morphologie, Tux bondit vers le haut: d'une case en diagonale ou d'exactement deux cases verticalement (pas moins). Tux aimerait compléter une grimpe qui minimise le nombre de bonds. Par exemple, celle-ci utilise trois bonds:



Remarque: cet exemple illustre les trois seuls types de bonds possibles.

Formellement, un mur est représenté par un tableau bidimensionnel T, où l'entrée $T[i, j]$ contient un caractère qui représente une couleur, ou $\perp$ s'il n'y a pas de prise. Par exemple, le mur ci-dessus est représenté par:

$T =$

	1	2	3	4	5
1	V	R	V	B	$\perp$
2	R	R	B	$\perp$	B
3	V	$\perp$	V	B	$\perp$
4	R	V	B	V	R
5	$\perp$	R	V	B	V

(a) Afin d'identifier la quantité minimale de bonds, nous pourrions explorer exhaustivement *tous* les parcours possibles. Cette procédure fonctionnerait-elle en temps polynomial dans le pire cas par rapport à n? Justifiez. 3 pts

(b) Quel est le nombre de bonds minimal pour le mur ci-dessus? Justifiez. 2 pts

(c) Donnez un algorithme, sous forme de pseudocode, qui identifie le nombre de bonds minimal en temps $\mathcal{O}(n^2)$. 7 pts

Remarque: dans le doute, donnez au moins une description textuelle pour m'aider à vous donner des points.

Question 4: plus courts chemins

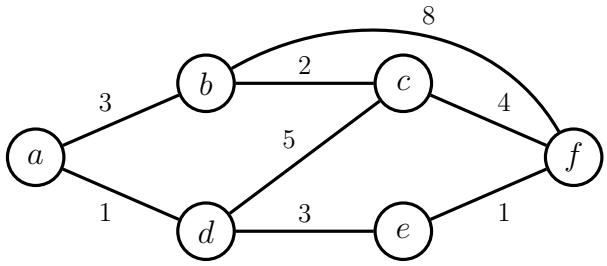
(a) Reconsidérons le problème de la question 3. Supposons que chaque prise possède une valeur entière positive qui représente sa difficulté. Par exemple, si Tux utilise trois prises rouges de difficultés $[2, 2, 3]$, alors il obtient un score de 7. Tux aimerait compléter une grimpe qui maximise son score (sans se soucier de minimiser le nombre de bonds). 5 pts

Expliquez comment identifier le score maximal en construisant un graphe, puis en invoquant l'algorithme de Dijkstra, Bellman-Ford ou Floyd-Warhsall. Vous pouvez illustrer votre approche à l'aide de l'exemple ci-dessous (sans nécessairement le résoudre). Quel est le temps d'exécution asymptotique de votre approche dans le pire cas par rapport à n?

$T =$

	1		2		3	
1	B	4	R	3	B	2
2	$\perp$	$\perp$	B	1	R	2
3	B	1	R	2	$\perp$	$\perp$

(b) Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe pondéré ci-dessous afin de déterminer la longueur d'un plus court chemin de a vers f. Arrêtez l'exécution *dès que possible*. Laissez une trace des itérations effectuées en indiquant les sommets marqués et les distances partielles identifiées. 3 pts



Question 5: algorithmes probabilistes

Il n'est pas nécessaire d'évaluer vos résultats numériquement; des expressions symboliques suffisent.

Nous disons qu'une séquence s de n entiers est *débalancée* si:

— $n \geq 3$ et n est impair,
— s contient $(n+1)/2$ occurrences d'un même nombre,
— s contient $(n-1)/2$ autres nombres distincts qui apparaissent chacun exactement une fois.

Par exemple, la séquence $s = [2, 2, 1, 2, 3, 2, 4]$ de taille $n = 7$ est débalancée. Dans une séquence débalancée, il y a toujours un élément majoritaire, par ex. 2 dans la séquence précédente. Considérons ces deux algorithmes probabilistes qui cherchent à identifier l'élément majoritaire d'une séquence débalancée:

Entrée: séquence débalancée s de taille n
Résultat: maj(s)

```
majoritéA(s):
    faire
        choisir i ∈ [1..n] aléatoirement de façon uniforme
        choisir j ∈ [1..n] aléatoirement de façon uniforme
    tant que ¬(i ≠ j ∧ s[i] = s[j])                    // deux éléments égaux?
    retourner s[i]
```

Entrée: séquence débalancée s de taille n
Résultat: maj(s)

```
majoritéB(s):
    choisir i ∈ [1..n]          aléatoirement de façon uniforme
    choisir j ∈ [1..n] \ {i}    aléatoirement de façon uniforme    // n − 1 choix car i exclu
    si s[j] = s[i] alors                                           // deux éléments égaux?
        retourner s[j]
    retourner s[1]
```

Pour chacun des algorithmes `majoritéA` et `majoritéB`:

(a) Dites s'il est de Las Vegas ou de Monte Carlo. Expliquez pourquoi. 3 pts

(b) Selon votre réponse en (a), identifiez le temps espéré ou la probabilité d'erreur de l'algorithme. Justifiez. 7 pts

5. Algorithmes récursifs et approche diviser-pour-régner

Diviser-pour-régner

- *A)* découper en sous-problèmes disjoints
- *B)* obtenir solutions récursivement
- *C)* s'arrêter aux cas de base (souvent triviaux)
- *D)* combiner solutions pour obtenir solution globale
- *Exemple*: tri par fusion $\mathcal{O}(n \log n)$

Récurrences linéaires

- *Cas homogène:* $\sum_{i=0}^{d} a_i \cdot t(n-i) = 0$
- *Polynôme caractéristique:* $\sum_{i=0}^{d} a_i \cdot x^{d-i}$
- *Forme close:* $t(n) = \sum_{i=1}^{d} c_i \cdot \lambda_i^n$ où les λ_i sont les racines
- *Constantes c_i:* obtenues en résolvant un sys. d'éq. lin.
- *Cas non homo.:* si $= c \cdot b^n$, on multiplie poly. par $(x - b)$
- *Exemple*:
  - Récurrence: $t(n) = 3 \cdot t(n-1) + 4 \cdot t(n-2)$
  - Poly. carac.: $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$
  - Forme close: $t(n) = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n$

Autres méthodes

- *Substitution*: remplacer $t(n), t(n-1), t(n-2), \ldots$ par sa déf. jusqu'à deviner la forme close
- *Arbres*: construire un arbre représentant la récursion et identifier le coût de chaque niveau

Quelques algorithmes

- *Hanoï*: *src*$[1:n-1] \to$ *tmp*, *src*$[n] \to$ *dst*, *tmp*$[1:n-1] \to$ *dst* $\mathcal{O}(2^n)$
- *Exp. rapide*: exploiter $b^n = (b^{n \div 2})^2 \cdot b^{n \bmod 2}$ $\mathcal{O}(\log n)$
- *Mult. rapide*: calculer $(a+b)(c+d)$ en 3 mult. $\mathcal{O}(n^{\log 3})$
- *Horizon*: découper blocs comme tri par fusion $\mathcal{O}(n \log n)$

Théorème maître (allégé)

- $t(n) = c \cdot t(n \div b) + f(n)$ où $f \in \mathcal{O}(n^d)$:
  - $\mathcal{O}(n^d)$ si $c < b^d$
  - $\mathcal{O}(n^d \cdot \log n)$ si $c = b^d$
  - $\mathcal{O}(n^{\log_b c})$ si $c > b^d$

6. Force brute

Approche

- *Exhaustif*: essayer toutes les sol. ou candidats récursivement
- *Explosion combinatoire*: souvent # solutions $\geq b^n, n!, n^n$
- *Avantage*: simple, algo. de test, parfois seule option
- *Désavantage*: généralement très lent et/ou avare en mémoire

Techniques pour surmonter explosion

- *Élagage*: ne pas développer branches inutiles
- *Contraintes*: élaguer si contraintes enfreintes
- *Bornes*: élaguer si impossible de faire mieux
- *Approximations*: débuter avec approx. comme meilleure sol.
- *Si tout échoue*: solveurs SAT ou d'optimisation

Problème des n dames

- *But*: placer n dames sur échiquier sans attaques
- *Algo.*: placer une dame par ligne en essayant colonnes dispo.

Sac à dos

- *But*: maximiser valeur sans excéder capacité
- *Algo.*: essayer sans et avec chaque objet
- *Mieux*: élaguer dès qu'il y a excès de capacité
- *Mieux++*: élaguer si aucune amélioration avec somme valeurs

Retour de monnaie

- *But*: rendre montant avec le moins de pièces
- *Algo.*: pour chaque pièce, essayer d'en prendre 0 à # max.

7. Programmation dynamique

Approche

- *Principe d'optimalité*: solution optimale obtenue en combinant solutions de sous-problèmes qui se chevauchent
- *Descendante*: algo. récursif + mémoïsation (ex. Fibonacci)
- *Ascendante*: remplir tableau itér. avec solutions sous-prob.

Retour de monnaie

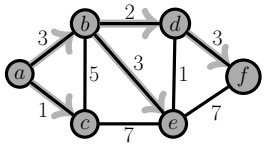
- *Sous-question*: # pièces pour rendre j avec pièces 1 à i?
- *Identité*: $T[i,j] = \min(T[i-1,j],\ T[i,j-s[i]]+1)$
- *Exemple*: montant $m=10$ et pièces $s=[1,5,7]$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5	2
3	0	1	2	3	4	1	2	1	2	3	2

Sac à dos

- *Sous-question*: val. max. avec capacité j et les objets 1 à i?
- *Identité*: $T[i,j] = \max(T[i-1,j],\ T[i-1,j-p[i]]+v[i])$

Plus courts chemins



- *Déf.*: chemin simple de poids minimal
- *Bien défini*: si aucun cycle négatif
- *Approche générale*: raffiner distances partielles itérativement
- *Dijkstra*: raffiner en marquant sommet avec dist. min.
- *Floyd-Warshall*: raffiner via sommet intermédiaire v_k
- *Bellman-Ford*: raffiner avec $\geq 1, 2, \ldots, |V|-1$ arêtes
- *Sommaire*:

	Dijkstra	**Bellman-Ford**	**Floyd-Warshall**
Types de chemins	d'un sommet vers les autres		paires de sommets
Poids négatifs?	✗	✓	✓
Temps d'exécution	$\mathcal{O}(\|V\|\log\|V\|+\|E\|)$	$\Theta(\|V\|\cdot\|E\|)$	$\Theta(\|V\|^3)$
Temps ($\|E\|\in\Theta(1)$)	$\mathcal{O}(\|V\|\log\|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$	$\Theta(\|V\|^3)$
Temps ($\|E\|\in\Theta(\|V\|)$)	$\mathcal{O}(\|V\|\log\|V\|)$	$\Theta(\|V\|^2)$	$\Theta(\|V\|^3)$
Temps ($\|E\|\in\Theta(\|V\|^2)$)	$\mathcal{O}(\|V\|^2)$	$\Theta(\|V\|^3)$	$\Theta(\|V\|^3)$

8. Algorithmes et analyse probabilistes

Modèle probabiliste

- *Modèle*: on peut tirer à pile ou face (non déterministe)
- *Aléa*: on peut obtenir une loi uniforme avec une pièce
- *Idéalisé*: on suppose avoir accès à une source d'aléa parfaite (en pratique: source plutôt pseudo-aléatoire)

Algorithmes de Las Vegas

- *Temps*: varie selon les choix probabilistes
- *Valeur de retour*: toujours correcte
- *Exemple*: tri rapide avec pivot aléatoire
- *Temps espéré*: dépend de $\mathbb{E}[Y_x]$ où $Y_x = \#$ opér. sur entrée x

Algorithmes de Monte Carlo

- *Temps*: borne ne varie *pas* selon les choix probabilistes
- *Valeur de retour*: pas toujours correcte
- *Exemple*: algorithme de Karger
- *Prob. d'erreur*: dépend de $\Pr(Y_x \neq$ bonne sortie sur $x)$

Coupe minimum: algorithme de Karger

- *Coupe*: partition (X, Y) des sommets d'un graphe non dirigé
- *Taille*: # d'arêtes qui traversent X et Y
- *Coupe min.*: identifier la taille minimale d'une coupe
- *Algorithme*: contracter itérativement une arête aléatoire en gardant les multi-arêtes, mais pas les boucles

- *Prob. d'erreur*: $\leq 1 - 1/|V|^2$ (Monte Carlo)
- *Amplification*: on peut réduire (augmenter) la prob. d'erreur (de succès) arbitrairement (en général: avec min., maj., $\vee$, etc.)

Temps moyen

- *Temps moyen*: $\sum$(temps instances de taille n) / # instances
- *Attention*: *pas* la même chose que le temps espéré
- *Hypothèse*: entrées distribuées uniformément ($\pm$ réaliste)
- *Exemple*: $\Theta(n^2)$ pour le tri par insertion