IFT436 – Algorithmes et structures de données

Université de Sherbrooke

Examen périodique

Enseignant: Michael Blondin
Date: lundi 18 octobre 2021
Durée: 110 minutes

Directives:

— Vous devez répondre aux questions dans le **cahier de réponses**, *pas* sur ce questionnaire;
— **Une seule feuille** de notes manuscrites au format 8½" × 11" est permise;
— **Aucun matériel additionnel** (notes de cours, fiches récapitulatives, etc.) n'est permis;
— **Aucun appareil électronique** (calculatrice, téléphone, montre intelligente, etc.) n'est permis;
— Vous devez donner **une seule réponse** par sous-question;
— L'examen comporte **4 questions** sur **3 pages** valant un total de **50 points**;
— La correction se base notamment sur la **clarté**, l'**exactitude** et la **concision** de vos réponses, ainsi que sur la **justification** pour les questions qui en requièrent une;
— Si la **base d'un logarithme** n'est pas spécifiée, il s'agit de la base 2: « log » dénote « $\log_2$ »;
— Les indices d'une séquence **débutent à 1**; autrement dit, $s = [s[1], s[2], \ldots, s[n]]$ si $n = |s|$.

Question 1: analyse des algorithmes

(a) Ordonnez ces fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 selon la notation $\mathcal{O}$ (de la plus faible vers la plus haute complexité): 7 pts

$$\underbrace{4 \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2^i}{5} + 3 \right)}_{f_1}, \quad \underbrace{\log(n^{42}) + \frac{2}{9} n^4}_{f_2}, \quad \underbrace{\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}}_{f_3}, \quad \underbrace{\frac{4}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (6 + \log n)}_{f_4}, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (3i + 2j)}_{f_5}.$$

(b) Considérons un algorithme $\mathcal{A}$ qui reçoit en entrée un graphe non dirigé connexe de n sommets et m arêtes. Après l'avoir analysé, nous avons obtenu $t_{\max} \in \Omega(3m + 5 \log n - 2)$, où $t_{\max}$ dénote le temps d'exécution dans le pire cas de $\mathcal{A}$. Pouvons-nous affirmer que $t_{\max} \in \Omega(n)$? Justifiez. 2 pts

(c) Soit $f(n) \coloneqq 3n^2 + 5n - \log(n+1)$. Montrez que $f \in \mathcal{O}(n^2)$ en identifiant explicitement une constante multiplicative c et un seuil n_0. Pour obtenir tous les points, vous devez choisir $c = 4$, sinon vous obtiendrez la moitié des points. 2 pts

(d) Dites auxquels de ces ensembles appartient la fonction $\sqrt{n}$: 2 pts

$$\mathcal{O}(2^n), \quad \mathcal{O}(n), \quad \Omega(3 \cdot \sqrt{n}), \quad \Theta(n), \quad \mathcal{O}(\log n), \quad \mathcal{O}(n^2), \quad \Omega(1).$$

Question 2: tri

Considérons l'algorithme de tri suivant:

Entrée: séquence s de $n \in \mathbb{N}$ éléments comparables
Sortie: s triée

```
1 i ← n
2 tant que i ≥ 1
3 |  si (i < n) et (s[i] > s[i+1]) alors
4 |  |  s[i] ↔ s[i+1]                    // inverser le contenu de s[i] et s[i+1]
5 |  |  i ← i + 1
6 |  sinon
7 |  |  i ← i − 1
8 retourner s
```

(a) Exécutez l'algorithme sur l'entrée $s = [22, 33, 11]$. Donnez une trace qui illustre clairement le contenu de la séquence s et du compteur i à la fin de chaque tour de la boucle **tant que**. 3 pts

(b) Les affirmations suivantes sont toutes vraies. Choisissez en *deux* (pas plus!) et montrez leur véracité. 7 pts

(i) L'algorithme fonctionne en temps $\Omega(n^2)$ dans le pire cas.

(ii) L'algorithme fonctionne en temps $\mathcal{O}(n^2)$ dans le pire cas.

(iii) L'algorithme fonctionne en temps $\Omega(n)$ dans le meilleur cas.

(iv) L'algorithme fonctionne en temps $\mathcal{O}(n)$ dans le meilleur cas.

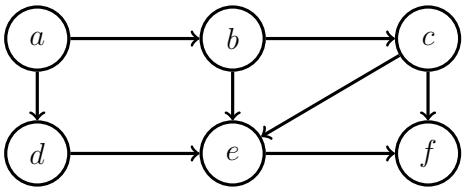
(v) L'algorithme termine.

(vi) L'algorithme est correct.

(c) Dites si l'algorithme est stable et/ou s'il est sur place. Justifiez. 4 pts

Question 3: graphes

(a) Considérons ce graphe dirigé $\mathcal{G}$:



(i) Donnez la *matrice d'adjacence* de $\mathcal{G}$ et le degré entrant de chacun de ses sommets. 2 pts

(ii) Dites si $\mathcal{G}$ possède un ordre topologique. Si c'est le cas, donnez un tel ordre; sinon, expliquez pourquoi il n'en existe aucun. 2 pts

(iii) Si l'on retirait la direction des arêtes de $\mathcal{G}$, le graphe non dirigé résultant aurait-il un arbre couvrant? Justifiez. 2 pts

(b) Soit $\mathcal{G}$ un graphe dirigé acyclique. Si l'on renverse la direction des arêtes de $\mathcal{G}$, obtient-on forcément un graphe dirigé acyclique? Justifiez. 2 pts

(c) Un *point d'articulation* d'un graphe non dirigé connexe $\mathcal{G}$ est un sommet v dont le retrait rend le graphe non connexe. Donnez un algorithme, sous forme de pseudocode, qui résout le problème suivant: 5 pts

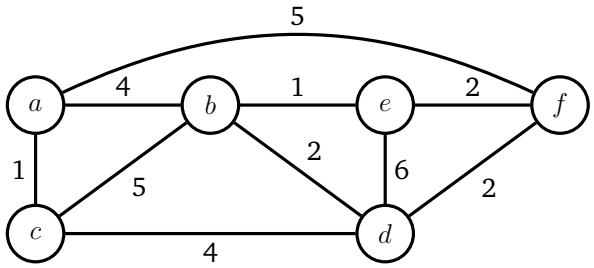
ENTRÉE: graphe non dirigé connexe $\mathcal{G} = (V, E)$ (sous forme de liste d'adjacence) et sommet $v \in V$
SORTIE: v est-il un point d'articulation de $\mathcal{G}$?

Analysez son temps d'exécution dans le pire cas. Pour obtenir tous les points, il doit appartenir à $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

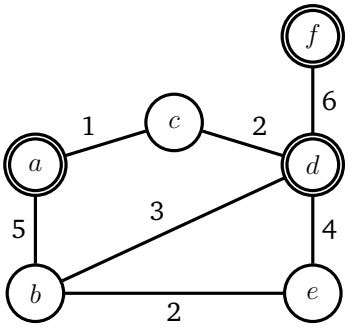
Précision: au besoin, vous pouvez invoquer des algorithmes couverts en classe sans les réimplémenter.

Question 4: algorithmes gloutons

(a) Identifiez un arbre couvrant minimal de ce graphe pondéré avec l'algorithme de Prim–Jarník. Laissez une trace de l'ordre dans lequel les arêtes de l'arbre sont sélectionnées. 3 pts



(b) Un *graphe terminal* est un graphe non dirigé $\mathcal{G} = (V, E)$ muni d'un ensemble de sommets $T \subseteq V$ dits *terminaux*. Un *arbre terminalisant* de $\mathcal{G}$ est un sous-graphe qui est un arbre et qui contient tous les sommets de T (et possiblement d'autres de V). Lorsque $\mathcal{G}$ est pondéré, on peut chercher à identifier un *arbre terminalisant minimal*. Par exemple, le graphe terminal pondéré ci-dessous est muni des sommets terminaux $T = \{a, d, f\}$. Ses arêtes $\{\{a, b\}, \{b, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$ forment un arbre terminalisant de poids 17.



Entrées: graphe non dirigé connexe $\mathcal{G} = (V, E)$ avec sommets terminaux $T \subseteq V$, et où E est pondéré par p
Résultat: un arbre terminalisant minimal de $\mathcal{G}$

$V' \leftarrow \emptyset$; $E' \leftarrow \emptyset$
trier E en ordre croissant selon r, puis selon p en bris d'égalité
considérer chaque sommet $v \in V$ comme un arbre
pour $\{u, v\} \in E$
  si (V', E') *forme un arbre et* $T \subseteq V'$ **alors**
    quitter la boucle
  sinon si u *et* v *n'appartiennent pas au même arbre* **alors**
    fusionner les arbres contenant u et v
    ajouter u et v **à** V'; **ajouter** $\{u, v\}$ **à** E'
retourner (V', E')

Considérons l'algorithme ci-dessus. Il associe à chaque arête e une *priorité* $r[e]$ définie comme suit: $r[e] \coloneqq 0$ si les deux sommets de e sont terminaux, $r[e] \coloneqq 1$ si un seul sommet de e est terminal, et $r[e] \coloneqq 2$ sinon. Il procède à la manière de l'algorithme de Kruskal, mais en triant les arêtes selon leur priorité, puis leur poids.

(i) Si l'on a accès à un algorithme de calcul d'arbre terminalisant minimal, comment peut-on l'utiliser afin de calculer un arbre couvrant minimal? 1 pt

(ii) Exécutez l'algorithme ci-dessus sur le graphe terminal ci-dessus en laissant une trace de l'ordre dans lequel les arêtes de l'arbre sont sélectionnées. Dites si l'arbre terminalisant est minimal. Justifiez. 2,5 pts

(iii) Dites si l'algorithme ci-dessus est correct. Justifiez. 3,5 pts