IFT503/IFT711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 2

Enseignant:	Michael Blondin
Date de remise:	mercredi 10 avril 2019 à 10:30
À réaliser:	individuellement
Modalités:	remettre en classe, au début du cours, en copie imprimée ou manuscrite lisible

Dans ce devoir, l'expression $[a]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, a\}$.

Question 1. 10 P.

Montrez que le problème de décision suivant est dans P:

<u>LEQ</u>

ENTRÉE: nombres x et y représentés en binaire et séparés par le symbole # (x et y peuvent contenir des 0 non significatifs à gauche);

QUESTION: $x \leq y$?

Le bit de poids faible de x et y est situé à leur droite. Par exemple, ces entrées doivent être acceptées:

$$\begin{aligned} 011\#101 &\quad \text{car } 3 \leq 5, \\ 101\#01011 &\quad \text{car } 5 \leq 11, \end{aligned}$$

et celles-ci doivent être refusées:

$$\begin{aligned} 110\#101 &\quad \text{car } 6 > 5, \\ 00010\#01 &\quad \text{car } 2 > 1. \end{aligned}$$

Vous devez donner une machine de Turing *complète* sans utiliser les primitives de haut niveau vues en classe. Vous pouvez supposer que x et y contiennent au moins un bit chacun, et que vous avez accès à un nombre arbitraire de rubans.

Question 2. 10 P.

Une permutation sur l'ensemble $[a]$ est une bijection $f\colon [a] \to [a]$. L'exponentiation f^k est définie par:

— f^0 est l'identité,
— f^k dénote la permutation $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{composée } k-1 \text{ fois}}$, par ex. $f^1 = f$, et f^3 est telle que $f^3(x) = f(f(f(x)))$.

Considérons le problème de décision suivant:

<u>PUISSANCEPERM</u>

ENTRÉE: deux permutations $f\colon [a] \to [a]$ et $g\colon [a] \to [a]$, et un entier k représenté en binaire;

QUESTION: $g = f^k$?

Montrez que PUISSANCEPERM $\in \mathsf{P}$. Vous pouvez cette fois utiliser les primitives vues en classe et donner une machine et/ou du pseudocode de haut niveau. Nous supposons qu'une permutation est représentée sous forme de tableau. Par exemple, la permutation $f\colon [3] \to [3]$ telle que $f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2$ est représentée par le tableau $[3, 1, 2]$. Vous pouvez supposer que les indices d'un tableau débutent à 0 ou 1 selon votre préférence.

Question 3. 10 P.

Supposons que le Département offre $k \in \mathbb{N}_{>0}$ cours à $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ étudiant·e·s, où chaque cours est offert à une et une seule période. Un *horaire* de $m \in \mathbb{N}_{>0}$ périodes est une fonction $h\colon [k] \to [m]$ où $h(i) = p$ indique que le cours i est offert à la période p. Un horaire possède un *conflit* s'il existe un·e étudiant·e $j \in [\ell]$ inscrit·e à deux cours $i, i' \in [k]$ tels que $h(i) = h(i')$; autrement dit à deux cours offerts à la même période. Un horaire est *sans conflit* s'il ne possède pas de conflit.

Montrez que le problème de décision suivant est dans NP en décrivant un *vérificateur polynomial*:

<u>SansConflit</u>

Entrée:	une matrice $M \in \{0,1\}^{k \times \ell}$ où $M[i][j] = 1$ ssi l'étudiant·e j est inscrit·e au cours i, et un nombre unaire $m \in \mathbb{N}_{>0}$;
Question:	existe-t-il un horaire de m périodes sans conflit?

Vous pouvez supposer que $k, \ell, m > 0$ et vous pouvez utiliser les primitives vues en classe. Un horaire n'est pas nécessairement surjectif, donc il peut n'y avoir aucun cours durant une période.

Question 4. 10 P.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé. Nous disons que G est *k-coloriable* s'il existe une fonction $c\colon V \to [k]$ telle que $(u, v) \in E \implies c(u) \neq c(v)$. Autrement dit, G est k-coloriable s'il est possible de colorier ses sommets avec au plus k couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents ne possèdent pas la même couleur.

Considérons le problème de décision suivant:

<u>3-Col</u>

Entrée:	un graphe G non dirigé décrit par une matrice d'adjacence;
Question:	G est-il 3-coloriable?

Le problème 3-Col est NP-complet. Montrez que SansConflit est NP-ardu en montrant que:

$$\text{3-Col} \leq_{\mathsf{P}} \text{SansConflit}.$$

Vous devez argumenter que votre réduction est bien une réduction et qu'elle est bien polynomiale.