# IGL502/752 – Techniques de vérification et de validation

Université de Sherbrooke

# Devoir 3

| | |
|---|---|
| Enseignant: | Michael Blondin |
| Date de remise: | jeudi 3 novembre 2022 à 15h29 |
| À réaliser: | à deux ou individuellement au 1er cycle<br>individuellement aux cycles supérieurs |
| Modalités: | remettre au format PDF en ligne sur Turnin |
| Bonus: | les questions bonus sont indiquées par ★ |
| Pointage: | sur 30 points au 1er cycle<br>sur 38 points aux cycles supérieurs |

**Question 1.** 2 pts

Pour chaque formule $\Phi$ suivante, dites si $\Phi$ est une formule CTL ou non. Justifiez.

(a) $\exists \mathsf{F} \forall \mathsf{X} \mathsf{G} \exists \mathsf{X}(p \lor q)$

(b) $\forall \mathsf{X} \neg \exists ((\exists \mathsf{F} p) \mathbin{\mathsf{U}} \neg q)$

(c) $\forall \mathsf{X} \exists (q \land \forall \mathsf{F} p)$

(d) $((p \lor (\exists (p \mathbin{\mathsf{U}} q))) \land (\exists \mathsf{X} \forall \mathsf{G} \forall \mathsf{G} p))$

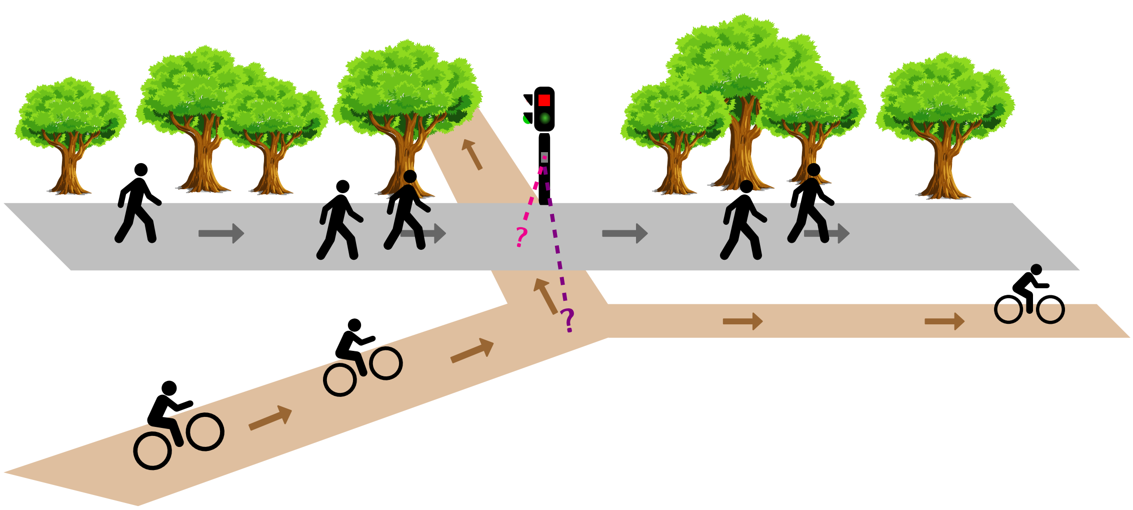
**Question 2.**

Dans le cadre de sa stratégie de mobilité durable, l'Université désire installer un feu de circulation à l'intersection d'une voie piétonnière et d'une piste cyclable, toutes deux à sens unique. Ce feu possède deux capteurs:

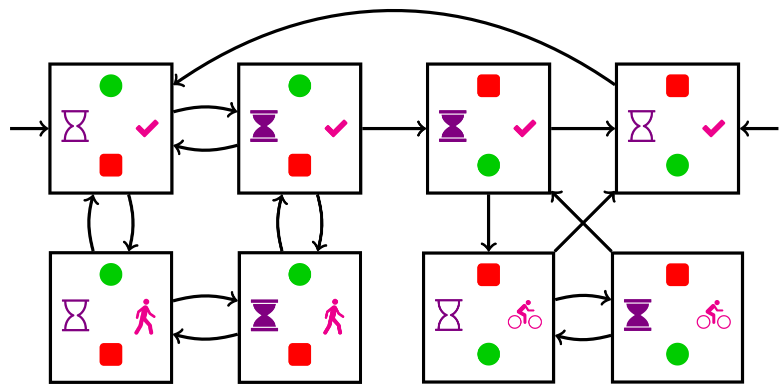
(1) l'un qui détecte s'il y a un·e cycliste en attente de traverser ⧗ ou non ⧖;

(2) l'autre qui détecte la traverse d'un·e piéton·ne 🚶, ou la traverse d'un·e cycliste 🚲, ou l'absence de personne en train de traverser ✔.

Un·e cycliste en attente peut changer d'idée et poursuivre son chemin à l'embranchement.



L'ingénieure en charge du projet a modélisé le contrôleur du feu de circulation par un système de transition $\mathcal{T}$, où chacun de ses huit états indique l'état du feu piétonnier (*haut: rouge* 🟥 *ou vert* 🟢), l'état du premier capteur (*gauche*), l'état du second capteur (*droite*), et l'état du feu des cyclistes (*bas: rouge* 🟥 *ou vert* 🟢):



Définissons l'ensemble des propositions atomiques $AP = \{f_p, f_c, a, t_p, t_c\}$ où:

- $f_p$ indique l'état du feu piétonnier: $f_p \equiv$ 🟢 et $\neg f_p \equiv$ 🟥;
- $f_c$ indique l'état du feu des cyclistes: $f_c \equiv$ 🟢 et $\neg f_c \equiv$ 🟥;
- $a$ indique s'il y a un·e cycliste en attente de traverser: $a \equiv$ ⧗ et $\neg a \equiv$ ⧖;
- $t_p$ indique si un·e piéton·ne traverse l'intersection: $t_p \equiv$ 🚶 et $\neg t_p \equiv$ {🚲, ✔};
- $t_c$ indique si un·e cycliste traverse l'intersection: $t_c \equiv$ 🚲 et $\neg t_c \equiv$ {🚶, ✔}.

(a) Représentez chacune de ces propriétés par une formule CTL: 5 pts

(i) Aucun·e cycliste ne traverse lorsque le feu piétonnier est vert.

(ii) Le feu piétonnier peut toujours redevenir vert.

(iii) Il est impossible qu'un·e cycliste doive attendre pour toujours.

(iv) Lorsqu'un feu est rouge, il peut devenir vert au moment suivant.

(v) Lorsque le feu piétonnier est vert, il redevient forcément rouge, et entre temps le feu des cyclistes est rouge.

(b) Montrez qu'au moins une des propriétés est satisfaite et qu'au moins une est non satisfaite par le contrôleur. 3 pts

**Question 3.** 6 pts

Toutes les formules de cette question ont comme propositions atomiques $AP := \{p, q\}$. Pour chaque affirmation « $\Phi_1 \not\equiv \Phi_2$ » ci-dessous, vous devez exhiber une structure de Kripke $\mathcal{T}$ telle que $(\mathcal{T} \models \Phi_1) \neq (\mathcal{T} \models \Phi_2)$; autrement dit, une structure $\mathcal{T}$ qui satisfait une formule, mais pas l'autre. Justifiez vos réponses.

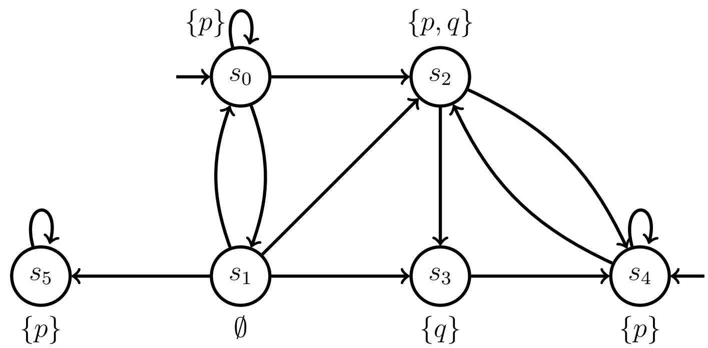
(a) $\neg\forall(p \mathbin{\mathsf{U}} q) \not\equiv \exists(p \mathbin{\mathsf{U}} \neg q)$

(b) $\exists\mathsf{X}\forall\mathsf{G}p \not\equiv \forall\mathsf{X}\exists\mathsf{G}p$

(c) $\exists\mathsf{F}\,\forall\mathsf{G}\,\exists\mathsf{F}p \not\equiv \forall\mathsf{G}\,\exists\mathsf{F}p$

**Question 4.** 10 pts

Soit $\mathcal{T}$ la structure de Kripke suivante sur propositions atomiques *AP* $\coloneqq \{p, q\}$:




Pour chaque formule $\Phi$ suivante, donnez $[\![\Phi]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des états de $\mathcal{T}$ qui satisfont $\Phi$, et dites si $\mathcal{T} \models \Phi$. Justifiez.

(a) $\forall\mathsf{G}(p \lor q)$

(b) $\exists\mathsf{G}(p \lor q)$

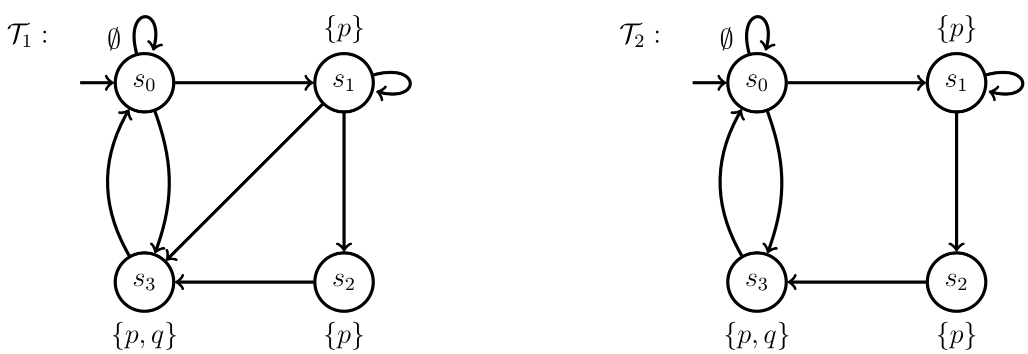
(c) $\exists(p \mathbin{\mathsf{U}} q)$

(d) $\exists\mathsf{X}\,\forall(p \mathbin{\mathsf{U}} q)$

(e) $\forall\mathsf{G}\,\exists\mathsf{F}\,\exists(p \mathbin{\mathsf{U}} q)$

**Question 5.** 4 pts

Donnez une formule CTL satisfaite par l'une des structures de Kripke ci-dessous, mais pas par l'autre. Justifiez.



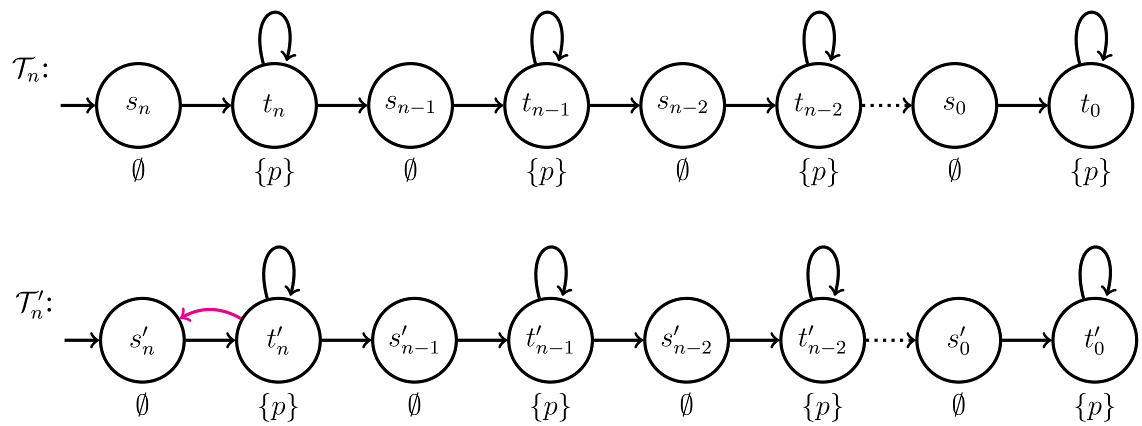
*Vous n'avez pas à répondre à la question ci-dessous si vous êtes au premier cycle. Si vous y répondez, vous pourrez obtenir jusqu'à 2 point bonus (en incluant le sous-bonus).*

**Question 6. (cycles supérieurs)**

Nous disons qu'une formule LTL $\varphi$ et une formule CTL $\Phi$ sont *équivalentes*, dénoté $\varphi \equiv \Phi$, lorsque $\mathcal{T} \models \varphi \iff \mathcal{T} \models \Phi$ pour toute structure de Kripke $\mathcal{T}$. Autrement dit, $\varphi \equiv \Phi$ ssi elles ne peuvent pas être distinguées par une structure de Kripke.

(a) Montrez qu'il n'existe *aucune* formule LTL équivalente à la formule CTL $\forall \mathsf{G} \exists \mathsf{F} p$. 3 pts

(b) Soient $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}'_n$ ces structures de Kripke, sur *AP* $:= \{p\}$, qui ne diffèrent que d'une seule transition:




(i) Soit $n \geq 1$. Montrez que $\mathcal{T}_n \models \mathsf{FG}p$ et $\mathcal{T}'_n \not\models \mathsf{FG}p$, où cette formule est en LTL. 2 pts

★ On définit la taille $|\Phi|$ d'une formule CTL $\Phi$ inductivement par ★ 4 pts

$$
\begin{aligned}
|\mathit{vrai}| &= 1, & |p| &= 1,\\
|\neg\Phi| &= |\Phi|, & |\Phi_1 \wedge \Phi_2| &= \max(|\Phi_1|, |\Phi_2|),\\
|\exists \mathsf{X} \Phi| &= |\Phi| + 1, & |\exists(\Phi_1 \mathbin{\mathsf{U}} \Phi_2)| &= \max(|\Phi_1|, |\Phi_2|) + 1,\\
|\forall \mathsf{X} \Phi| &= |\Phi| + 1, & |\forall(\Phi_1 \mathbin{\mathsf{U}} \Phi_2)| &= \max(|\Phi_1|, |\Phi_2|) + 1.
\end{aligned}
$$

Montrez que $\mathcal{T}_n \models \Phi \iff \mathcal{T}'_n \models \Phi$ pour tout $n \geq 1$ et toute formule CTL telle que $|\Phi| \leq n$.

*Indice: raisonnez par induction sur $|\Phi|$ et considérez ces équivalences plus fortes:*

— $s_i \models_{\mathcal{T}_n} \Phi \iff s_j \models_{\mathcal{T}_n} \Phi$ *pour tout* $n \geq i, j \geq |\Phi|$,

— $t_i \models_{\mathcal{T}_n} \Phi \iff t_j \models_{\mathcal{T}_n} \Phi$ *pour tout* $n \geq i, j \geq |\Phi|$,

— $u \models_{\mathcal{T}_n} \Phi \iff u' \models_{\mathcal{T}'_n} \Phi$ *pour tout état* $u$ *et tout* $n \geq |\Phi|$.

(ii) Montrez qu'il existe une formule LTL pour laquelle il n'existe aucune formule CTL équivalente. 3 pts

*Remarque: vous pouvez utiliser les sous-questions précédentes, même celles sans réponse.*